ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
10 Νοεμβρίου 2018

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\left(\frac{(-8)^3}{2^3}+\frac{(-12)^3}{(-3)^3}+10\right)\cdot\left(\frac{(-8)^2}{2^2}+\frac{(-12)^2}{(-3)^2}-22\right).$$

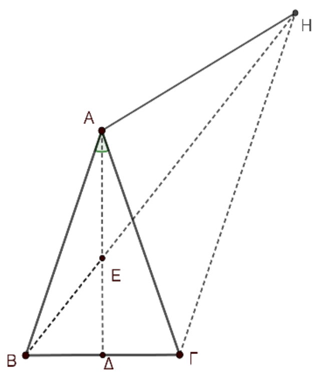
Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned}A&=\left(\frac{(-8)^3}{2^3}+\frac{(-12)^3}{(-3)^3}+10\right)\cdot\left(\frac{(-8)^2}{2^2}+\frac{(-12)^2}{(-3)^2}-22\right)\\&=\left(\left(\frac{-8}{2}\right)^3+\left(\frac{-12}{-3}\right)^3+10\right)\cdot\left(\left(\frac{-8}{2}\right)^2+\left(\frac{-12}{-3}\right)^2-22\right)\\&=\left((-4)^3+(+4)^3+10\right)\cdot\left((-4)^2+(+4)^2-22\right)\\&=\left(-4^3+4^3+10\right)\cdot\left(16+16-22\right)=10\cdot 10=100.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) με $\widehat{A}=40°$ και ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Επίσης τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΗ είναι ισοσκελή με ΕΑ = ΕΒ και ΑΒ = ΑΗ.



Να αποδείξετε ότι:

(α) $A\widehat{H}B=20°$,

(β) $A\hat{\Gamma}H=40^\circ$,

(γ) η ΒΗ είναι η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{H}\Gamma$.

Σημείωση: *Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.*

Λύση

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\widehat{A} = 40°$ και ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, θα είναι $\hat{A}_1 = B\hat{A}E = 20^\circ$. Επειδή το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ισοσκελές, συμπεραίνουμε ότι $\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = 20^\circ$. Επειδή τέλος το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές με $AB = AH$, θα ισχύει: $A\hat{H}B = \hat{B}_1 = 20^\circ$.

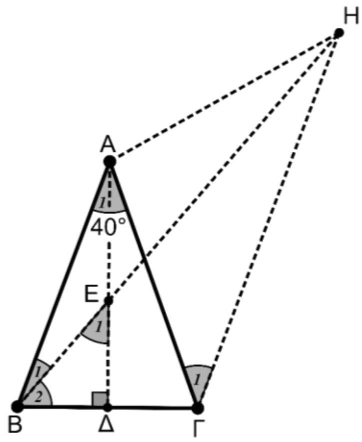
(β) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές με $A\hat{H}B = \hat{B}_1 = 20^\circ$ θα είναι

$$B\hat{A}H = 180^\circ - \left(20^\circ + 20^\circ\right) = 140^\circ$$

Όμως έχουμε ότι:

$$B\hat{A}H = B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}H \Rightarrow 140^\circ = 40^\circ + \Gamma\hat{A}H \Rightarrow \Gamma\hat{A}H = 100^\circ.$$

Επειδή $A\Gamma = AB = AH$, το τρίγωνο ΓΑΗ είναι ισοσκελές, οπότε



Σχήμα 1

$$2 \cdot A\hat{\Gamma}H = 180^\circ - \Gamma\hat{A}H \Rightarrow A\hat{\Gamma}H = \frac{180^\circ - \Gamma\hat{A}H}{2} = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ.$$

(γ) Από το ερώτημα (β) έχουμε ότι $A\hat{H}\Gamma = A\hat{\Gamma}H = 40^\circ$, ενώ από το ερώτημα (γ) έχουμε ότι $A\hat{H}B = 20°$, Επομένως θα έχουμε

$$B\hat{H}\Gamma = A\hat{H}\Gamma - A\hat{H}B = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ,$$

δηλαδή $B\hat{H}\Gamma = A\hat{H}B = 20^\circ$, οπότε η ΒΗ είναι η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{H}\Gamma$.

Πρόβλημα 3

Ο Νίκος επισκέφθηκε για ψώνια 3 καταστήματα στη σειρά. Στο πρώτο κατάστημα ξόδεψε 30 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που είχε μαζί του. Στο δεύτερο κατάστημα ξόδεψε 40 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το πρώτο κατάστημα. Στο τρίτο κατάστημα ξόδεψε 50 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το δεύτερο κατάστημα. Αν μετά την αγορά του στο τρίτο κατάστημα τελείωσαν τα χρήματα του, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του όταν ξεκίνησε τις αγορές του.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο τρίτο κατάστημα είχε x ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του συν 50 ευρώ και δεν του έμειναν καθόλου χρήματα. Επομένως ξόδεψε όσα χρήματα του είχαν απομείνει και έχουμε την εξίσωση:

$$x=\frac{x}{2}+50 \Leftrightarrow x-\frac{x}{2}=50 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=50 \Leftrightarrow x=100.$$

Επομένως, όταν έφυγε από το δεύτερο κατάστημα του είχαν μείνει 100 ευρώ.
Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο δεύτερο κατάστημα είχε y ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του συν 40 ευρώ και του έμειναν 100 ευρώ. Επομένως έχουμε:

$$y=\frac{y}{2}+40+100 \Leftrightarrow y-\frac{y}{2}=100+40 \Leftrightarrow \frac{y}{2}=140 \Leftrightarrow y=280.$$

Επομένως όταν πήγε στο δεύτερο κατάστημα του είχαν μείνει 280 ευρώ.
Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο πρώτο κατάστημα είχε z ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του συν 30 ευρώ και του έμειναν 280 ευρώ. Επομένως έχουμε:

$$z=\frac{z}{2}+30+280 \Leftrightarrow z-\frac{z}{2}=280+30 \Leftrightarrow \frac{z}{2}=310 \Leftrightarrow z=620.$$

Επομένως όταν πήγε στο πρώτο κατάστημα είχε μαζί του 620 ευρώ.

Πρόβλημα 4

Τρεις θετικοί ακέραιοι α,β και γ, με $\alpha<\beta<\gamma$, έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον ακέραιο 72 και ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τον ακέραιο 1008. Αν γνωρίζετε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α,β ισούται με το μέγιστο κοινό διαιρέτη των β,γ, να βρείτε τις δυνατές τιμές των α,β,γ.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση οι αριθμοί α,β και γ είναι διαφορετικά πολλαπλάσια του 72. Επομένως, θα είναι της μορφής

$\alpha=72\kappa,\ \beta=72\lambda,\ \gamma=72\mu$ (όπου κ,λ,μ διαφορετικοί ανά δύο με $\kappa<\lambda<\mu$).

Επειδή πρέπει οι αριθμοί α,β και γ να είναι και διαιρέτες του $1008=14\cdot 72$, πρέπει τα κλάσματα

$$\frac{1008}{72\kappa}=\frac{72\cdot 14}{72\kappa}=\frac{14}{\kappa},\quad \frac{1008}{72\lambda}=\frac{72\cdot 14}{72\lambda}=\frac{14}{\lambda},\quad \frac{1008}{72\mu}=\frac{72\cdot 14}{72\mu}=\frac{14}{\mu},$$

να είναι ακέραιοι, δηλαδή πρέπει οι διαφορετικοί ανά δύο ακέραιοι κ,λ,μ να είναι διαιρέτες του 14. Επομένως οι δυνατές τιμές τους είναι 1, 2, 7 και 14.
Λόγω της προϋπόθεσης $\kappa<\lambda<\mu$ οι δυνατές τιμές για την τριάδα (κ,λ,μ) είναι: $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,2,7)$ ή $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,2,14)$ ή $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,7,14)$ ή $(\kappa,\lambda,\mu)=(2,7,14)$.
Επομένως, έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν είναι $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,2,7)$, τότε $\alpha=72, \beta=144, \gamma=504$, η οποία είναι δεκτή, γιατί $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=\text{ΜΚΔ}(\beta,\gamma)=72$.
- Αν είναι $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,2,14)$, τότε $\alpha=72, \beta=144, \gamma=1008$, η οποία δεν είναι δεκτή, γιατί $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=72\neq 144=\text{ΜΚΔ}(\beta,\gamma)$.
- Αν είναι $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,7,14)$, τότε $\alpha=72, \beta=504, \gamma=1008$, η οποία δεν είναι δεκτή, γιατί $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=72\neq 504=\text{ΜΚΔ}(\beta,\gamma)$.

- Αν είναι $(\kappa,\lambda,\mu)=(2,7,14)$, τότε $\alpha=144,\ \beta=504,\ \gamma=1008$ που δεν είναι δεκτή γιατί $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=72\neq 504=\text{ΜΚΔ}(\beta,\gamma)$.

Επομένως, οι δυνατές τιμές είναι $\alpha=72,\beta=144,\ \gamma=504$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}}+\frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}}\right)\cdot(-2018)^2+\left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-20}\right)+200.$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}}+\frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}}\right)\cdot(-2018)^2+\left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-20}\right)+200\\&=\left(\left(\frac{-20}{4}\right)^{11}+\left(\frac{-25}{-5}\right)^{11}\right)\cdot(-2018)^2+\left(\left(\frac{-8}{2}\right)^{20}-\left(\frac{4}{1}\right)^{20}\right)+200\\&=\left((-5)^{11}+(+5)^{11}\right)\cdot(-2018)^2+\left((-4)^{20}-4^{20}\right)+200\\&=\left(-5^{11}+5^{11}\right)\cdot(-2018)^2+\left(4^{20}-4^{20}\right)+200=0\cdot(-2018)^2+0+200=200.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Ο Νίκος αγόρασε 4 μήλα από τα οποία το βαρύτερο ζυγίστηκε πρώτο και ήταν 120 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το δεύτερο μήλο και ο μέσος όρος του βάρους των δύο πρώτων μήλων ήταν 115 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το τρίτο μήλο και παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τριών μήλων ήταν μικρότερος από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των δύο πρώτων μήλων κατά 10 γραμμάρια. Τέλος όταν ζυγίστηκε το τέταρτο μήλο παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τεσσάρων μήλων ήταν επίσης μικρότερος κατά 10 γραμμάρια από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των τριών μήλων. Να βρείτε πόσα γραμμάρια ήταν καθένα από τα τρία μήλα που ζυγίστηκαν μετά το πρώτο.

Σημείωση: *Ο μέσος όρος ν αριθμών* $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ *είναι ο αριθμός* $\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu}$.

Λύση

Ονομάζουμε Α το βάρος σε γραμμάρια του πρώτου μήλου, Β του δεύτερου, Γ του τρίτου και Δ του τέταρτου. Τότε είναι Α = 120 γραμμάρια και

$$\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}=115\Leftrightarrow \mathrm{A}+\mathrm{B}=230\Leftrightarrow 120+\mathrm{B}=230\Leftrightarrow \mathrm{B}=230-120=110.$$

Άρα το δεύτερο μήλο ήταν 110 γραμμάρια.

Μετά τη ζύγιση του τρίτου μήλου είχαμε ότι:

$$\frac{A+B+\Gamma}{3}=115-10 \Leftrightarrow \frac{A+B+\Gamma}{3}=105 \Leftrightarrow A+B+\Gamma=315 \Leftrightarrow \Gamma=330-(A+B)$$
$$\Leftrightarrow \Gamma=315-(120+110) \Leftrightarrow \Gamma=315-230=85.$$
Άρα το τρίτο μήλο ήταν 85 γραμμάρια.
Μετά τη ζύγιση του τέταρτου μήλου είχαμε ότι:
$$\frac{A+B+\Gamma+\Delta}{4}=105-10 \Leftrightarrow \frac{A+B+\Gamma+\Delta}{4}=95 \Leftrightarrow A+B+\Gamma+\Delta=380$$
$$\Leftrightarrow \Delta=380-(A+B+\Gamma) \Leftrightarrow \Delta=380-(120+110+85) \Leftrightarrow \Delta=380-315=65.$$
Επομένως το τέταρτο μήλο ήταν 65 γραμμάρια.

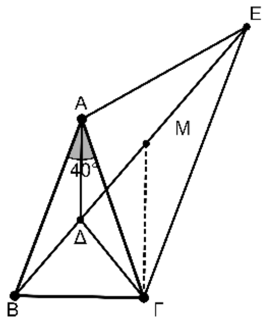
Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλες τις τιμές του ακεραίου α, για τις οποίες η εξίσωση $\frac{x-1}{x-2}=\frac{x-\alpha}{x-6}$ έχει ακέραιες λύσεις.

Λύση

Πρέπει $x \neq 2$ *και* $x \neq 6$. Με απαλοιφή των παρονομαστών παίρνουμε ότι:
$$(x-1)(x-6)=(x-2)(x-\alpha) \Leftrightarrow x^2-7x+6=x^2-(2+\alpha)x+2\alpha \Leftrightarrow (\alpha-5)x=2\alpha-6$$
Επομένως για $\alpha \neq 5$ έχουμε
$$x=\frac{2\alpha-6}{\alpha-5}=\frac{2(\alpha-5)+4}{\alpha-5}=2+\frac{4}{\alpha-5}.$$
Για να είναι ακέραιος ο αριθμός αυτός, θα πρέπει ο παρονομαστής $(\alpha-5)$ να είναι διαιρέτης του 4, οπότε $\alpha-5 \in \{\pm1, \pm2, \pm4\}$. Επομένως $\alpha \in \{1,3,4,6,7,9\}$.

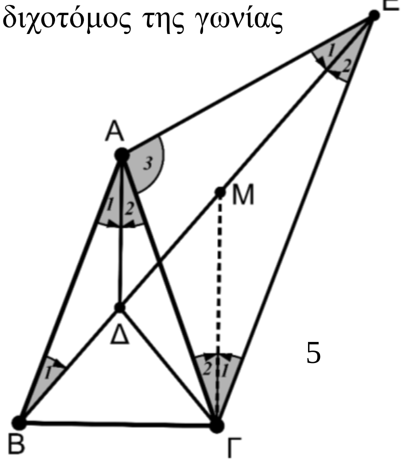
Πρόβλημα 4



Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) με $\widehat{A}=40°$ και για το σημείο Δ ισχύει ότι: ΔΑ = ΔΒ = ΔΓ.
Αν η ΓΜ είναι παράλληλη στην ΑΔ και το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΕ), να αποδείξετε ότι:
(α) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.
(β) $\Gamma\widehat{A}E=100°$.
(γ) η ΑΜ είναι κάθετη στην ΓΕ.
Σημείωση: *Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.*

Λύση

(**α**) Επειδή το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ισοσκελές (ΔΒ=ΔΓ), το σημείο Δ θα ανήκει στη μεσοκάθετη της βάσης ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. Η κορυφή Α ανήκει επίσης στη μεσοκάθετη της ΒΓ (διότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές). Άρα η ΑΔ είναι η μεσοκάθετη της ΒΓ και κατά συνέπεια θα είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.



Σχήμα 2

(β) Επειδή το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές (ΔΑ=ΔΒ) και $\widehat{A}_1 = 20°$, θα ισχύει $\widehat{B}_1 = 20°$. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 = 20°$ και από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε:

$$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 + \widehat{B}_1 + \widehat{E}_1 = 180° \Leftrightarrow 20° + 20° + \widehat{A}_3 + 20° + 20° = 180°.$$

Άρα είναι: $\widehat{A}_3 = 100°$.

(γ) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές (ΑΕ = ΑΓ) με $\Gamma\widehat{A}E = \widehat{A}_3 = 100°$, οπότε:

$$\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = \widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma}_2 = 40°.$$

Ισχύει όμως $\widehat{\Gamma}_2 + \widehat{A}_2 = 20°$ (διότι $\widehat{\Gamma}_2, \widehat{A}_2$ εντός εναλλάξ ΑΔ|| ΓΜ και ΑΓ τέμνουσα). Στο ερώτημα **(β)** είδαμε ότι $\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 = 20°$. Άρα $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{E}_2 = 20°$, οπότε το τρίγωνο ΓΜΕ είναι ισοσκελές με ΜΓ = ΜΕ. Επομένως, το Μ θα ανήκει στη μεσοκάθετη της βάσης ΓΕ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΓΕ, όπως και το Α, οπότε θα είναι ΑΜ⊥ΓΕ.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x που ικανοποιούν συγχρόνως την εξίσωση $(x-1)(x^2-7x+10)=0$ και την ανίσωση $\frac{x(x-1)}{2}-2<\frac{x(x-5)}{2}+6$.

Λύση

Θα λύσουμε την εξίσωση και την ανίσωση και θα επιλέξουμε τους ακέραιους που ικανοποιούν και τις δύο. Για την εξίσωση έχουμε:

$$(x-1)(x^2-7x+10)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=5,$$

αφού η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι $\Delta=(-7)^2-4\cdot 1\cdot 10=9>0$.

Για την ανίσωση έχουμε

$$\frac{x(x-1)}{2}-2<\frac{x(x-5)}{2}+6 \Leftrightarrow x^2-x-4<x^2-5x+12.$$

$$\Leftrightarrow 5x-x<12+4 \Leftrightarrow 4x<16 \Leftrightarrow x<4.$$

Επομένως. η εξίσωση και η ανίσωση αληθεύουν συγχρόνως για $x=1$ ή $x=2$.

Πρόβλημα 2

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α,β είναι τέτοιοι ώστε $\frac{5\alpha^2\beta^2}{\alpha^4-36\beta^4}=1,$ να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης

$$\mathrm{K}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}.$$

Λύση

Από τη δεδομένη σχέση έχουμε ότι:

$$\alpha^4-36\beta^4=5\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4=0. \qquad (1)$$

Για να προκύψει απλούστερη σχέση μεταξύ των α,β πρέπει να γίνει παραγοντοποίηση της παράστασης $\alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4$. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Στον πρώτο τρόπο προσπαθούμε να χωρίσουμε την παράσταση σε ομάδες με κατάλληλη διάσπαση ενός όρου της σε δύο. Έτσι έχουμε

$$\alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4=\alpha^4-9\alpha^2\beta^2+4\alpha^2\beta^2-36\beta^4=\alpha^2(\alpha^2-9\beta^2)+4\beta^2(\alpha^2-9\beta^2)$$

$$=(\alpha^2-9\beta^2)(\alpha^2+4\beta^2)$$

Επομένως έχουμε

$$\alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4=0 \Leftrightarrow (\alpha^2-9\beta^2)(\alpha^2+4\beta^2)=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2-9\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=3\beta \text{ ή } \alpha=-3\beta.$$

Αν $\alpha=3\beta,$ τότε $\mathrm{K}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{3\beta-\beta}{3\beta+\beta}=\frac{1}{2}$, ενώ

Αν $\alpha=-3\beta,$ τότε $\mathrm{K}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{-3\beta-\beta}{-3\beta+\beta}=\frac{-4}{-2}=2.$

Στο δεύτερο τρόπο διαιρούμε την παράσταση με β^4 (αν είναι $\beta=0$, τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται 0 = 1`, άτοπο), οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4=0\Leftrightarrow \beta^4\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4-5\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-36\right)=0\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4-5\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-36=0$$

$$\overset{\frac{\alpha}{\beta}=\omega}{\Longleftrightarrow} \omega^4-5\omega^2-36=0\Leftrightarrow \left(\omega^2\right)^2-5\omega^2-36=0\Leftrightarrow \omega^2=\frac{5\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{5\pm 13}{2}$$

$\Leftrightarrow \omega^2=9$ ή $\omega^2=-4$ (απορρίπτεται) $\Leftrightarrow \omega=3$ ή $\omega=-3\Leftrightarrow \alpha=3\beta$ ή $\alpha=-3\beta.$

Επομένως έχουμε, όπως και στον πρώτο τρόπο:

Αν $\alpha=3\beta,$ τότε $\mathrm{K}=\dfrac{3\beta-\beta}{3\beta+\beta}=\dfrac{1}{2}$, ενώ, αν $\alpha=-3\beta,$ τότε $\mathrm{K}=\dfrac{-3\beta-\beta}{-3\beta+\beta}=\dfrac{-4}{-2}=2.$

Πρόβλημα 3

Να συγκριθούν οι αριθμοί

$$\mathrm{A}=\frac{2}{3}+\frac{2}{6}+\frac{2}{9}+\cdots+\frac{2}{99}$$

και

$$\mathrm{B}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{95}+\frac{1}{97}+\frac{1}{98}+\frac{1}{100}$$

Λύση

Παρατηρώντας προσεκτικά τους αριθμούς Α και Β διαπιστώνουμε ότι:

οι προσθετέοι του Α είναι της μορφής $\dfrac{2}{3\kappa},\ \kappa=1,2,\ldots,33$, δηλαδή ο Α έχει 33 όρους.

Επίσης διαπιστώνουμε ότι ο Β έχει προσθετέους της μορφής $\dfrac{1}{\nu},$ όπου το ν παίρνει όλες τις τιμές από το 2 μέχρι το 100, εκτός αυτών που είναι πολλαπλάσια του 3, δηλαδή ο Β έχει $99-33=66$ όρους, δηλαδή έχει διπλάσιους όρους από τον αριθμό Α. Επομένως πρέπει να βρούμε μία ανισωτική σχέση μεταξύ των όρων του Α και των όρων του Β η οποία σε κάθε όρο του Α θα αντιστοιχίζει δύο όρους του Β. Με απλή παρατήρηση βλέπουμε ότι πρέπει να βρούμε τη σχέση μεταξύ του όρου $\dfrac{2}{3\kappa}$ του Α και του αθροίσματος των όρων $\dfrac{1}{3\kappa-1}$ και $\dfrac{1}{3\kappa+1}$ του Β, για $\kappa=1,2,\ldots,33$.

Επειδή βλέπουμε ότι $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}>\dfrac{2}{3}$, θα αποδείξουμε ότι ισχύει

$$\frac{1}{3\kappa-1}+\frac{1}{3\kappa+1}>\frac{2}{3\kappa}\ ,$$

για κάθε $\kappa=1,2,\ldots,33$. Πράγματι, κάνοντας την πρόσθεση στο πρώτο μέλος, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{6\kappa}{9\kappa^2-1}>\frac{2}{3\kappa}$$

ή ισοδύναμα $18k^2>18k^2-2$, που ισχύει για κάθε $\kappa=1,2,\ldots,33$

Επομένως, έχουμε τις 33 ομόστροφες ανισότητες:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}>\frac{2}{3},\ \frac{1}{5}+\frac{1}{7}>\frac{2}{6},\ \ldots,\frac{1}{98}+\frac{1}{100}>\frac{2}{99}\ ,$$

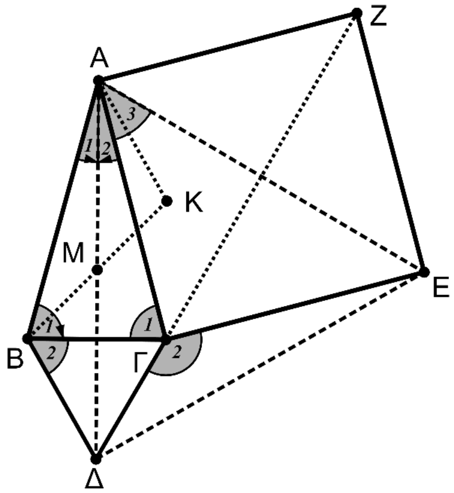
από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε ότι $\mathrm{B}>\mathrm{A}$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\widehat{A} = 30°$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ και τετράγωνο ΑΓΕΖ. Αν το σημείο Μ είναι το μέσο της ΑΔ και το σημείο Κ είναι το συμμετρικό της κορυφής Β ως προς το σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

β) Οι ευθείες ΑΚ, ΕΜ και ΔΓ περνάνε από το ίδιο σημείο.



Σχήμα 3

Λύση

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και $\widehat{A} = 30°$ θα ισχύει: $\widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1 = 75°$. Η ΑΔ είναι μεσοκάθετος της ΒΓ, οπότε είναι και διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A} = 30°$, οπότε θα είναι: $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 15°$.

Συγκρίνουμε τώρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΕ. Αυτά έχουν από τις υποθέσεις:

(i) ΑΒ=ΑΓ=ΓΕ **(ii)** ΒΔ=ΓΔ και επιπλέον για τις περιεχόμενες γωνίες έχουμε:

$$A\widehat{B}\Delta = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 75° + 60° = 135° \text{ και}$$

$$\Delta\widehat{\Gamma}E = 360° - \widehat{\Gamma}_1 - 90° - 60° = 360° - 150° - 75° = 135°\ ,$$

δηλαδή ισχύει ότι: **(iii)** $A\widehat{B}\Delta = \Delta\widehat{\Gamma}E = 135°$.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΕ είναι ίσα και κατά συνέπεια ΑΔ = ΔΕ, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. Για τη γωνία $\Delta\widehat{A}E$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΔΕ έχουμε:

$$\Delta\widehat{A}E = \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = 15° + 45° = 60°,$$

αφού η γωνία $\hat{A}_3$ είναι οξεία γωνία του ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου ΑΓΕ.

Άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

(β) Για τη γωνία $\Delta\widehat{\Gamma}Z$ έχουμε: $\Delta\widehat{\Gamma}Z = \widehat{\Gamma}_2 + E\widehat{\Gamma}Z = 135° + 45° = 180°$. Άρα τα σημεία Δ, Γ, Ζ είναι συνευθειακά και επειδή η ΓΖ είναι μεσοκάθετη της ΑΕ, συμπεραίνουμε ότι **η ΔΖ είναι μεσοκάθετη της ΑΕ .**

Επειδή το Μ είναι μέσο της ΑΔ, και το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο, **η ΕΜ θα είναι μεσοκάθετη της ΑΔ** .

Εφόσον το Κ είναι το συμμετρικό του Β ως προς το Μ, ΜΑ=ΜΒ και $B\widehat{M}\Delta = A\widehat{M}K$ τα τρίγωνα ΜΑΚ και ΜΔΒ είναι ίσα, οπότε $B\widehat{\Delta}M = M\widehat{A}K = 30°$. Από τις προηγούμενες ισότητες, συμπεραίνουμε ότι **η ΑΚ είναι διχοτόμος, άρα και μεσοκάθετη του τριγώνου ισόπλευρου τριγώνου ΑΔΕ .**

Επομένως, οι ευθείες ΑΚ, ΕΜ και ΔΓ περνάνε από το σημείο τομής των μεσοκάθετων του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΔΕ.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε $\dfrac{26\alpha^3\beta^3}{\alpha^6 - 27\beta^6} = -1,$ να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης

$$\mathrm{K} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Λύση

Από τη δεδομένη σχέση έχουμε ότι:

$$\alpha^6 - 27\beta^6 = -26\alpha^3\beta^3 \Leftrightarrow \alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 = 0. \qquad (1)$$

Για να προκύψει απλούστερη σχέση μεταξύ των α, β πρέπει να γίνει παραγοντοποίηση της παράστασης $\alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6$. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Στον πρώτο τρόπο προσπαθούμε να χωρίσουμε την παράσταση σε ομάδες με κατάλληλη διάσπαση ενός όρου της σε δύο. Έτσι έχουμε

$$\alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 = \alpha^6 - \alpha^3\beta^3 + 27\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 = \alpha^3\left(\alpha^3 - \beta^3\right) + 27\beta^3\left(\alpha^3 - \beta^3\right)$$

$$= \left(\alpha^3 + 27\beta^3\right)\left(\alpha^3 - \beta^3\right).$$

Επομένως έχουμε

$$\alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 = 0 \Leftrightarrow \left(\alpha^3 + 27\beta^3\right)\left(\alpha^3 - \beta^3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha + 3\beta\right)\left(\alpha^2 - 3\alpha\beta + 9\beta^2\right)\left(\alpha - \beta\right)\left(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha + 3\beta = 0 \text{ ή } \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -3\beta \text{ ή } \alpha = \beta,$$

αφού $\alpha^2 - 3\alpha\beta + 9\beta^2 = \left(\alpha - \dfrac{3\beta}{2}\right)^2 + \dfrac{45\beta^2}{4} > 0$, για $\alpha\beta \neq 0$ (ισχύει από την υπόθεση)

και $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \left(\alpha + \dfrac{\beta}{2}\right)^2 + \dfrac{3\beta^2}{4} > 0,$ για $\alpha\beta \neq 0$.

Αν $\alpha = -3\beta,$ τότε $\mathrm{K} = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \dfrac{9\beta^2 - \beta^2}{9\beta^2 + \beta^2} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$, ενώ, αν $\alpha = \beta,$ τότε

$$\mathrm{K} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\beta^2 - \beta^2}{\beta^2 + \beta^2} = 0.$$

Στο δεύτερο τρόπο διαιρούμε την παράσταση με β^6 (αν είναι $\beta = 0$, τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται 0 = 1, άτοπο), οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 = 0 \Leftrightarrow \beta^6\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^6 + 26\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 - 27\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^6 + 26\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 - 27 = 0 \overset{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 = \omega}{\Longleftrightarrow} \omega^2 + 26\omega^2 - 27 = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{-26 \pm \sqrt{784}}{2} = \frac{-26 \pm 28}{2}$$

$$\Leftrightarrow \omega = 1 \text{ ή } \omega = -27 \Leftrightarrow \alpha^3 = \beta^3 \text{ ή } \alpha^3 = -27\beta^3 \Leftrightarrow \alpha = \beta \text{ ή } \alpha = -3\beta$$

Επομένως έχουμε, όπως και στον πρώτο τρόπο $\mathrm{K}=\frac{4}{5}$ ή $\mathrm{K}=0$.

Πρόβλημα 2

Αν οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w είναι όλοι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 1 και μικρότεροι ή ίσοι του 5 και επιπλέον ισχύει ότι $x+y+z+w=8$, να βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=x^2+y^2+z^2+w^2.$$

Λύση

Ξεκινώντας από την υπόθεση $1\leq x\leq 5$, θα έχουμε ότι:

$$1\leq x\leq 5 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)\leq 0 \Leftrightarrow x^2-6x+5\leq 0 \Leftrightarrow x^2\leq 6x-5,$$

όπου η ισότητα ισχύει για $x=1$ ή $x=5$.

Ομοίως, λαμβάνουμε

$$y^2\leq 6y-5,\ z^2\leq 6z-5,\ w^2\leq 6w-5,$$

όπου οι ισότητες ισχύουν μόνον όταν οι y, z, w παίρνουν τις τιμές 1 ή 5.

Προσθέτοντας τις παραπάνω τέσσερις ανισότητες κατά μέλη, έχουμε

$$\mathrm{A}=x^2+y^2+z^2+w^2\leq 6(x+y+z+w)-20=6\cdot 8-20=28.$$

Έχουμε ισότητα όταν ένας από τους αριθμούς ισούται με 5 και οι άλλοι με 1, οπότε η μέγιστη δυνατή τιμή της παράστασης είναι 28.

Πρόβλημα 3

Αν ο τετραψήφιος ακέραιος $\mathrm{A}=\overline{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0}=\alpha_3\cdot 10^3+\alpha_2\cdot 10^2+\alpha_1\cdot 10\ +\alpha_0$ έχει ψηφία τέτοια ώστε $\alpha_0>\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>0.$ να προσδιορίσετε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $9\cdot\mathrm{A}$.

Λύση

Χρησιμοποιώντας τη διαφορά $9\cdot\mathrm{A}=10\cdot\mathrm{A}-\mathrm{A}$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}9\cdot\mathrm{A}&=10\cdot\mathrm{A}-\mathrm{A}=\overline{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0 0}-\overline{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0}\\&=\left(\alpha_3\cdot 10^4+\alpha_2\cdot 10^3+\alpha_1\cdot 10^2+\alpha_0\cdot 10\right)-\left(\alpha_3\cdot 10^3+\alpha_2\cdot 10^2+\alpha_1\cdot 10\ +\alpha_0\right)\\&=\alpha_3\cdot 10^4+\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\cdot 10^3+\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\cdot 10^2+\left(\alpha_0-\alpha_1\right)\cdot 10-\alpha_0\\&=\alpha_3\cdot 10^4+\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\cdot 10^3+\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\cdot 10^2+\left(\alpha_0-\alpha_1-1\right)\cdot 10+(10-\alpha_0)\end{aligned}$$

οπότε, λόγω των υποθέσεων $\alpha_0>\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>0,$ ο αριθμός $9\cdot\mathrm{A}$ έχει τα ψηφία $\alpha_3,\ \alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_1-\alpha_2, \alpha_0-\alpha_1-1,\ 10-\alpha_0$, τα οποία έχουν άθροισμα ίσο με 9.

Σημείωση: Η αφαίρεση $10\mathrm{A}-\mathrm{A}$ μπορεί να γίνει και κατακόρυφα με το συνήθη τρόπο, αφού λάβουμε υπόψη ότι $\alpha_0>\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>0,$ ως εξής:

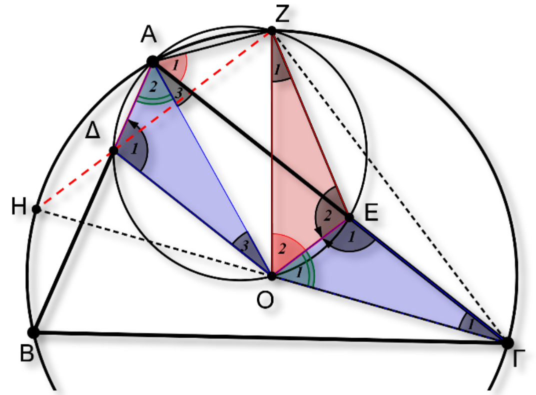
$$\begin{array}{rccccc} & & & \scriptstyle 1 & & \\ & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0\\ - & & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0\\ \hline & \alpha_3 & \alpha_2-\alpha_3 & \alpha_1-\alpha_2 & \alpha_0-\alpha_1-1 & 10-\alpha_0,\end{array}$$

οπότε καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (με $ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Η παράλληλη από το Ο προς την ΑΓ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Δ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος, έστω (c_1), του τριγώνου ΑΔΟ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε και το κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο Ζ. Έστω ότι η ΔΖ τέμνει τον κύκλο $c(O, R)$ στο Η. Να αποδείξετε ότι:
(α) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΓΕ είναι ίσα.
(β) Τα τρίγωνα ΟΖΕ και ΟΓΕ είναι ίσα.
(γ) Τα σημεία Γ, Ο, Η είναι συνευθειακά.

Λύση
(α) Επειδή ΟΔ || ΑΕ το τετράπλευρο ΑΔΟΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε ΑΔ = ΟΕ.
Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΓΕ έχουν:
(1) ΑΔ=ΟΕ (από το ισοσκελές τραπέζιο ΑΔΟΕ).
(2) ΟΑ=ΟΓ (ακτίνες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ).
(3) Το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ισοσκελές (ΟΑ=ΟΓ) οπότε: $\hat{Γ}_1 = \hat{Α}_3$. Η γωνία $\hat{Ε}_1$ είναι εξωτερική στο τετράπλευρο ΑΔΟΕ, οπότε: $\hat{Ε}_1 = \hat{Δ}_1$. Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών, καταλήγουμε και στην ισότητα: $\hat{Ο}_1 = \hat{Α}_2$



Σχήμα 4
Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει η ισότητα των τριγώνων ΟΑΔ και ΟΓΕ.

(β) Τα τρίγωνα ΟΓΕ και ΟΖΕ έχουν:

(i) ΟΖ = ΟΓ (ακτίνες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ),
(ii) η ΟΕ είναι κοινή πλευρά.
(iii) Ισχύουν η ισότητα γωνιών:
$\hat{Α}_1 = \hat{Ο}_2$ (είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c_1) και βαίνουν στο τόξο ΖΕ).
$\hat{Α}_1 = \frac{Ζ\hat{Ο}Γ}{2} = \frac{\hat{Ο}_1 + \hat{Ο}_2}{2}$ (η γωνία $\hat{Α}_1$ είναι εγγεγραμμένη και στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ με αντίστοιχη επίκεντρη την $Γ\hat{Ο}Ζ$), οπότε

$$\hat{Α}_1 = \hat{Ο}_2 = \frac{\hat{Ο}_1 + \hat{Ο}_2}{2} \Rightarrow \hat{Ο}_1 + \hat{Ο}_2 = 2\hat{Ο}_2 \Rightarrow \hat{Ο}_1 = \hat{Ο}_2.$$

Από τις σχέσεις (i), (ii) και (iii) προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΟΓΕ και ΟΖΕ είναι ίσα.
(γ) Τελικά, από τις προηγούμενες ισότητες τριγώνων, έχουμε ότι και τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΖΕ είναι ίσα, οπότε ΟΔ = ΕΖ. Επομένως το τετράπλευρο ΟΔΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο και ΔΖ || ΟΕ.

Από την ισότητα των τριγώνων ΟΓΕ και ΟΖΕ προκύπτουν οι δύο παρακάτω ισότητες τμημάτων $\mathrm{OZ}=\mathrm{O\Gamma}$ και $\mathrm{EZ}=\mathrm{E\Gamma}$, από τις οποίες προκύπτει ότι η ΟΕ είναι μεσοκάθετη της ΓΖ. Άρα και η ΔΖ θα είναι κάθετη στην ΓΖ, δηλαδή το σημείο Η είναι το αντιδιαμετρικό του σημείου Γ, οπότε τα σημεία $\Gamma,\ \mathrm{O},\ \mathrm{H}$ είναι συνευθειακά.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^4-x^3-18x^2+3x+9=0\ .$$

Λύση.

Μία πρώτη παρατήρηση είναι ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 9$ που είναι διαιρέτες του σταθερού όρου δεν ικανοποιούν την εξίσωση. Επομένως πρέπει να εργαστούμε με κατάλληλο μετασχηματισμό και παραγοντοποίηση. Παρατηρούμε ότι το $x=0$ δεν είναι λύση της εξίσωσης. Για $x\neq 0$ μπορούμε να διαιρέσουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης με το x^4**,** οπότε προκύπτει η ισοδύναμη εξίσωση:

$$x^2-x-18+\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}=0\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{9}{x^2}\right)-\left(x-\frac{3}{x}\right)-18=0 \qquad (1)$$

Θέτουμε $x-\dfrac{3}{x}=\omega$, οπότε $x^2+\dfrac{9}{x^2}-6=\omega^2\Rightarrow x^2+\dfrac{9}{x^2}=\omega^2+6$. Με αντικατάσταση στην (1) έχουμε την εξίσωση

$$\omega^2+6-\omega-18=0\Leftrightarrow\omega^2-\omega-12=0\Leftrightarrow\omega=4 \text{ ή } \omega=-3.$$

Άρα έχουμε;

$$x-\frac{3}{x}=4 \text{ ή } x-\frac{3}{x}=-3\Leftrightarrow x^2-4x-3=0 \text{ ή } x^2+3x-3=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{28}}{2} \text{ ή } x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{7} \text{ ή } x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}.$$

Πρόβλημα 2

Αν ο πενταψήφιος ακέραιος $\mathrm{A}=\overline{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0}=\alpha_4\cdot 10^4+\alpha_3\cdot 10^3+\alpha_2\cdot 10^2+\alpha_1\cdot 10\ +\alpha_0$ έχει ψηφία τέτοια ώστε $\alpha_0>\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>\alpha_4>0.$ να προσδιορίσετε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $9\cdot\mathrm{A}$.

Λύση

Χρησιμοποιώντας τη διαφορά $9\cdot\mathrm{A}=10\cdot\mathrm{A}-\mathrm{A}$ έχουμε ότι

$$9\cdot\mathrm{A}=10\cdot\mathrm{A}-\mathrm{A}=\overline{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0 0}-\ \overline{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0}$$

$$=\left(\alpha_4\cdot 10^5+\alpha_3\cdot 10^4+\alpha_2\cdot 10^3+\alpha_1\cdot 10^2+\alpha_0\cdot 10\right)-\left(\alpha_4\cdot 10^4+\alpha_3\cdot 10^3+\alpha_2\cdot 10^2+\alpha_1\cdot 10\ +\alpha_0\right)$$

$$=\alpha_4\cdot 10^5+\left(\alpha_3-\alpha_4\right)\cdot 10^4+\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\cdot 10^3+\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\cdot 10^2+\left(\alpha_0-\alpha_1\right)\cdot 10-\alpha_0$$

$$=\alpha_4\cdot 10^5+\left(\alpha_3-\alpha_4\right)\cdot 10^4+\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\cdot 10^3+\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\cdot 10^2+\left(\alpha_0-\alpha_1-1\right)\cdot 10+(10-\alpha_0)$$

οπότε, λόγω των υποθέσεων $\alpha_0>\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>\alpha_4>0,$ ο αριθμός $9\cdot\mathrm{A}$ έχει τα ψηφία $\alpha_4,\ \alpha_3-\alpha_4,\ \alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_1-\alpha_2, \alpha_0-\alpha_1-1,\ 10-\alpha_0$, τα οποία έχουν άθροισμα ίσο με 9.

Σημείωση: Η αφαίρεση $10 \cdot \mathrm{A} - \mathrm{A}$ μπορεί να γίνει και κατακόρυφα με το συνήθη τρόπο, αφού λάβουμε υπόψη ότι $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0,$ ως εξής:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & 1 & & \\
 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \\
- & & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & , \\
\hline
 & \alpha_4 & \alpha_3-\alpha_4 & \alpha_2-\alpha_3 & \alpha_1-\alpha_2 & \alpha_0-\alpha_1-1 & 10-\alpha_0, &
\end{array}$$

οπότε καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

Πρόβλημα 3
Αν οι αριθμοί x, y, z είναι θετικοί ακέραιοι, να λύσετε το σύστημα:

$$x + 2y^2 = 3z^3$$
$$y + 2z^2 = 3x^3$$
$$z + 2x^2 = 3y^3$$

Λύση
Ας υποθέσουμε ότι ο z είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τους άλλους δύο αγνώστους, δηλαδή $z \geq \max\{x, y\}$. (Οι άλλες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται ομοίως).
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $z > 1.$ Τότε , αφού $z \geq \max\{x, y\}$, θα είναι $x + 2y^2 < z + 2z^2 < 3z^3$, άτοπο.
- $z = 1.$ Τότε $x + 2y^2 = 3$ και αφού $1 \geq \max\{x, y\}$ έπεται ότι η τελευταία ισότητα ισχύει, αν και μόνον αν $x = y = 1$. Άρα έχουμε τη λύση: $(x, y, z) = (1,1,1)$.

Αυτή είναι η μοναδική λύση του συστήματος, αφού οι περιπτώσεις με $y \geq \max\{x, z\}$ ή $x \geq \max\{y, z\}$ οδηγούν στην ίδια λύση.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ (με $AB \parallel ΓΔ$ και $AB < ΓΔ$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Η εφαπτομένη στο B του κύκλου (c) τέμνει την ευθεία $ΔΓ$ στο σημείο E. Έστω Μ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$.
Να αποδείξετε ότι:

(α) Η ευθεία $ΑΔ$ είναι εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου, έστω (c_1), του τριγώνου $ΔΒΕ$.

(β) Το σημείο Μ ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο, έστω (c_2), του τριγώνου $ΟΒΓ$.

(γ) Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $ΔΒΕ$ και $ΟΒΓ$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο B.

Λύση
(α) Επειδή το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1, \hat{Γ}_2 = \hat{Δ}_2.$$

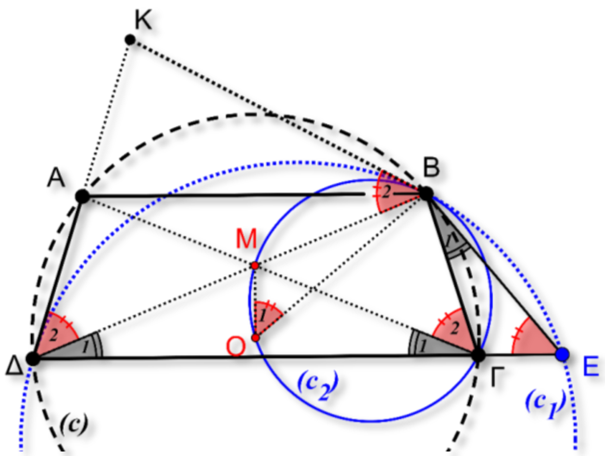
Επίσης, επειδή η BE εφάπτεται στον κύκλο (c), θα ισχύει: $\hat{B}_1 = \hat{Δ}_1$ (γωνία από τη χορδή $BΓ$ και την εφαπτόμενη BE). Άρα έχουμε

$$\hat{B}_1 = \hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1 \qquad (1).$$

Έστω (c_1) και (c_2) οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $ΔΒΕ$ και $ΟΒΓ$, αντίστοιχα. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η γωνία $\hat{Δ}_2$ (που δημιουργείται από τη χορδή $ΒΔ$ και την $ΑΔ$) είναι ίση με την γωνία $\hat{E}$, οπότε η $ΑΔ$ θα εφάπτεται στον κύκλο (c_1). Πράγματι, η γωνία $Β\hat{Γ}Δ$ είναι εξωτερική του τριγώνου $ΒΓΕ$, οπότε:

$$Β\hat{Γ}Δ = \hat{B}_1 + \hat{E} \Leftrightarrow \hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 = \hat{B}_1 + \hat{E}$$

και επειδή $\hat{B}_1 = \hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1$, καταλήγουμε στις ισότητες: $\hat{Γ}_2 = \hat{Δ}_2 = \hat{E}$.



Σχήμα 5

(β) Θα αποδείξουμε ότι το σημείο τομής M των διαγωνίων του ισοσκελούς τραπεζίου $ΑΒΓΔ$ ανήκει στον κύκλο (c_2). Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $ΒΓΟΜ$ είναι εγγράψιμο.

Πράγματι, η $ΟΜ$ είναι μεσοκάθετος της $ΑΒ$, οπότε:

$$Μ\hat{O}Β = \hat{M}_1 = \frac{Α\hat{O}Β}{2} = Α\hat{Γ}Β = \hat{Γ}_2.$$

Επομένως, το τετράπλευρο $ΒΓΟΜ$ είναι εγγράψιμο.

(γ) Θεωρούμε την εφαπτόμενη του κύκλου (c_1) στο σημείο B και έστω ότι τέμνει την προέκταση της $ΑΔ$ στο σημείο K. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία ΒΚ είναι εφαπτομένη και του κύκλου (c_2).

Πράγματι, έχουμε ότι

$$\hat{B}_2 = \hat{Δ}_2 \qquad (2)$$

γιατί η $ΚΔ$ είναι εφαπτομένη του (c_1) (όπως αποδείξαμε στα ερώτημα (α))

Ισχύουν όμως οι ισότητες γωνιών: $Κ\hat{B}Μ = \hat{B}_2 = \hat{Δ}_2 = \hat{Γ}_2 = Β\hat{Γ}Μ$. Άρα η $ΒΚ$ εφάπτεται και του κύκλου (c_2).